تعريف :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R

$Z(A)=\{a : a\in A ; [a,x]=0 \ \forall x\in A\}$ مركز A

Z(A) مثالي في A .

تعريف :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R و S مجموعة جزئية في A وغير خالية . نسمي المجموعة

$Z(S)=\{a : a\in A ; [a,x]=0 \ \forall x\in S\}$

مركز المجموعة S في A

مبرهنة :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R و I مثالياً في A عندئذٍ المجموعة

$Z(I)=\{a : a\in A ; [a,x]=0 \ \forall x\in I\}$

تشكل مثالياً في A

البرهان :

بديهياً

$\forall x\in I \quad [0,x]=0 \Rightarrow 0\in Z(I) \Rightarrow \emptyset\neq Z(I)\subseteq A$

$\forall a,b\in Z(I) \Rightarrow [a,x]=0 \quad \forall x\in I$
$[b,x]=0$

$[a-b,x]=[a,x]-[b,x]=0-0=0 \Rightarrow a-b\in Z(I)$

$\forall \lambda\in R \Rightarrow [\lambda a,x]=\lambda[a,x]=\lambda 0=0 \Rightarrow \lambda a\in Z(I)$

$\forall a\in A \Rightarrow d_a(Z(I))\subseteq Z(I) \qquad \forall c\in Z(I)$

لنبرهن أن $d_a(c)\in Z(I)$

$\forall x\in I \Rightarrow [d_a(c),x]=[[a,c],x]=0$

ع

$$[x,[a,c]] + [a,[c,x]] + [c,[x,a]] = 0$$

$$[[a,c],x] = [a,\underbrace{[c,x]}_{=0}] + [c,\underbrace{[x,a]}_{\in A}]$$

$$= [a,0] + 0 = 0+0 = 0$$

تمرين:

ليكن $f: A \to B$ تشاكل جبوري تام ولنفرض أن I مثالية في A عندئذ $f(I)$ مثالية في B

البرهان:

ليكن I معدول جزئي في A ⟸ $f(I)$ معدول جزئي في B

$$\forall a \in A \; ; \; d_a(f(I)) \subseteq f(I)$$

يكفي أن: $\forall c \in f(I) \; ; \; d_a(c) \in f(I)$

$$d_a(c) = [a,c]$$

بما أن $a \in B$ يوجد $x \in A$; $a = f(x)$

بما أن $c \in f(I)$ يوجد $y \in I$; $c = f(y)$

$$d_a(c) = [a,c] = [f(x), f(y)] = f([x,y]) = f(d_x(y)) \in f(I)$$

ومنه فإن $f(I)$ مثالية في B

تعريف:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R و I مجموعة جزئية غير خالية في A. نقول إن I مثالي مميز في A إذا كان:

① I معدول جزئي في I.

② $d(I) \subseteq I$ وذلك لأجل كل $d \in Der(A)$

ينتج مباشرة من التعريف أن كل مثالي مميز في A هو مثالي في A.

أيضاً إن كل من A و 0 مثاليات مميزة في A

تمرينة:

ليكن A جبر على الحلقة R إن مركز جبر $Z(A)$ مثالي مميز في A

البرهان:

وجدنا سابقاً أن $Z(A)=\{a : a\in A ; [a,x]=0 \ \forall x\in A\}$ معدول جزئي في A

ليكن $d\in Der(A)$ المطلوب أن

$$d(Z(A))\subseteq Z(A)$$

أي البرهان أنه أياً كان $a\in Z(A)$ فإن $d(a)\in Z(A)$

$\forall x\in A$ ؛ $[d(a),x]=0$??

لدينا $d([a,x]) = [d(a),x]+[a,d(x)]$

ومنه $[d(a),x] = d(\underbrace{[a,x]}_{=0}) - \underbrace{[a,\underbrace{d(x)}_{\in A}]}_{=0}$

$= d(0)-0=0$

ومنه فإن $d(a)\in Z(A)$ وبالتالي $Z(A)$ مثالي مميز في A

تمرين:

ليكن A جبر على الحلقة R و I و J مثاليين مميزين في A عندئذ كل من $I+J$ و $I\cap J$ مثالي مميز في A

الحل:

لإثبات كل من I و J معدول جزئي في A فإن $I+J$ معدول جزئي في A

$\forall d\in Der(A) ; d(I+J)\subseteq I+J$??

ليكن $x\in I+J$ يوجد $a\in I$ و $b\in J$ حيث أن $x=a+b$

$d(a+b) = d(a)+d(b) \in I+J$

ومنه فإن $I+J$ مثالي مميز في A

بما أن كلاً من I و J معدول جزئي في A فإن $I\cap J$ معدول جزئي في A

$\forall d\in Der(A)$ ؛ $d(I\cap J)\subseteq I\cap J$??

لتكن $a \in I \cap J$ عندئذٍ [redacted]

$a \in I \Rightarrow d(a) \in I$

$a \in J \Rightarrow d(a) \in J$

$\Rightarrow d(a) \in I \cap J$

ومنه $I \cap J$ مثالي مميز

تعريف:

ليكن M موديول جزئي معرف على الحلقة R و X مجموعة جزئية غير خالية في M. إن تقاطع جميع الموديولات الجزئية في M التي كل منها يحوي X هو موديول جزئي في M يحوي X نرمز له بالشكل $<X>$ وهو أصغر موديول جزئي في M يحوي X

تعريف:

ليكن A جبر لي معرف على الحلقة R و I, J مثاليين في A نأخذ المجموعة

$\mathcal{L} = \{[x, y] \quad \forall x \in I \quad \forall y \in J\}$

إن $\phi \neq \mathcal{L} \subset A$ لأن $0 \in [0, 0]$

نأخذ الموديول الجزئي في A المولد بالمجموعة $\mathcal{L}$ والذي هو أصغر موديول جزئي في A يحوي $\mathcal{L}$ ونرمز له $[I, J] = <\mathcal{L}>$

$[I, J] = [J, I]$

مبرهنة

ليكن A جبر لي معرف على الحلقة R و I, J مثاليين في A عندئذٍ:

① $[I, J] = [J, I]$

② $[I, J]$ مثالي في A

البرهان:

نفرض أن

$L_1 = \{[x, y] : x \in I, y \in J\}$

$L_2 = \{[y, x] ; y \in J, x \in I\}$

لنبرهن أن $L_1 = L_2$

القسم : السنة : المادة : المحاضرة :

لتكن $a \in \mathcal{L}_1$ عندئذٍ $y \in J$ ، $x \in I$; $a = [x, y]$ ومنه

$$a = [x, y] = -[y, x] = [\underbrace{-y}_{\in J}, \underbrace{x}_{\in I}] \in \mathcal{L}_2$$

وبالتالي $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ وبطريقة مشابهة نجد أن $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \Leftarrow \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$

وبالتالي : $\langle \mathcal{L}_1 \rangle = \langle \mathcal{L}_2 \rangle$

$$[I, J] = \langle \mathcal{L}_1 \rangle = \langle \mathcal{L}_2 \rangle = [J, I]$$

② لنبرهن أن $\forall a \in A \quad d_a([I, J]) \subseteq [I, J]$

لأجل ذلك لنبرهن أن :

$$d_a(\mathcal{L}_1) \subseteq \langle \mathcal{L}_2 \rangle$$

لتكن $b \in \mathcal{L}_1$ عندئذٍ $x \in I$ ، $y \in J$; $b = [x, y]$

إذاً $d_a(b) = d_a([x, y])$

$$= [\underbrace{d_a(x)}_{\in I}, y] + [x, \underbrace{d_a(y)}_{\in J}] \in \langle \mathcal{L}_1 \rangle = [I, J]$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\mathcal{L}_1 \subseteq \langle \mathcal{L}_1 \rangle \qquad \mathcal{L}_1 \subseteq \langle \mathcal{L}_1 \rangle$$

انتهت المحاضرة